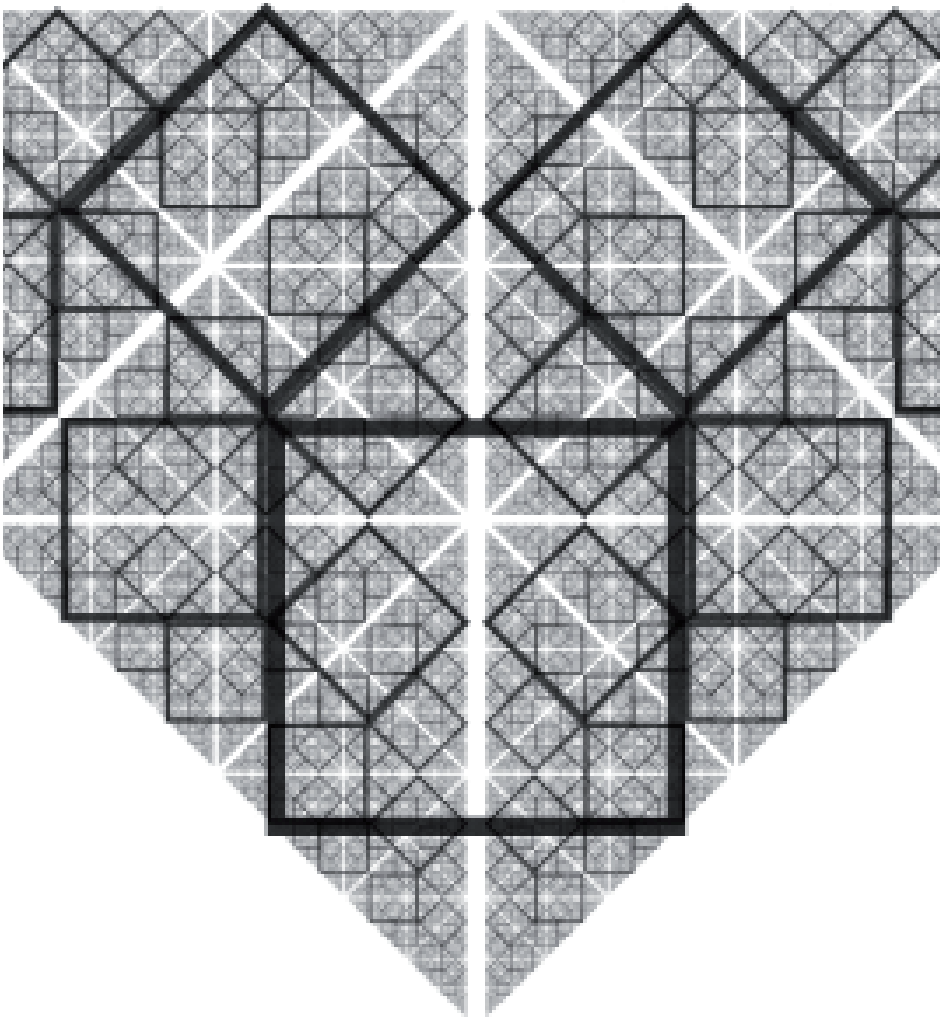
Alumna: Judit Pifarré Garcia
Tutora: Vanessa Florenza Royes

Fractals geomètrics

Presentació
El meu treball de recerca tracta sobre els fractals, i en concret em centraré en un tipus determinat: els fractals geomètrics. Em costà bastant decidir el tema, ja que n'hi ha milers. No obstant això, tenia present que fos el que fos havia d'estar relacionat amb el món de les ciències.

El treball consta d'una part de recerca bibliogràfica en la qual es realitza un estudi rigorós respecte el concepte de fractal, els fractals en la natura, les seves propietats per poder distingir un objecte fractal d'un altre que no ho és, el concepte d'iteració, ja que és la base de la seva creació, els principals fractals geomètrics existents i, per acabar, les seves aplicacions en els diversos camps del saber.

L'objectiu que em proposo és explicar de la forma més intel·ligible possible tots els aspectes relacionats amb aquest món de les matemàtiques, a fi que tothom qui tingui dubtes els pugui resoldre. Per tant, espero que un cop llegit el treball s'hagi entès què vol dir i per a què serveixen els fractals i també que es tingui una visió més «fractal» del món que ens envolta.



Cos del treball

Realment, és difícil donar una definició precisa i general d'aquest terme, tot i així es pot definir com un objecte geomètric i matemàtic l'estructura del qual es va repetint a diferents escales. La paraula 'fractal' prové del llatí fractus, que significa «fragmentat», «fracturat» o simplement «trencat», i a més fou introduïda pel matemàtic polonès Benoit Mandelbrot a la dècada de 1970.

La majoria de la comunitat no científica no ha sentit a parlar mai del mot 'fractal', ja que no fa gaire que va sorgir, tot i haver estat present en tot moment sense adonar-nos-en. Existeixen els fractals a la natura? Mandelbrot contestà: «Els núvols no són esferes, les muntanyes no són cons, les costes no són cercles, l'escorça dels arbres no és llisa, ni tampoc el viatge dels llamps és en línia recta».

Si ens fixem en aquelles coses naturals, no creades artificialment per l'home, no és tan fàcil deduir-ne la seva forma. Les muntanyes no són triangulars, els rius no són rectes, etc. Llavors, quina forma tenen? Doncs bé, només es pot explicar amb els fractals. La naturalesa presenta irregularitats i un cert caos que només amb els fractals podem apreciar i representar com realment són i apareixen en la natura. Alguns exemples que presenten patrons fractals són les flors, verdures, insectes, rius, arbres, fulles, llamps, flocs de neu, el perfil de les costes, núvols...

Cal tenir present que en el cos humà i en el d'altres animals existeixen moltes estructures amb geometria fractal, com per exemple la xarxa vascular, l'arbre bronquial, la xarxa neuronal, el cervell...

Per trobar una definició més clara i entenedora del concepte fractal, cal concretar les tres propietats destacades de tot fractal, tal com va escriure Mandelbrot en el seu primer llibre.

La primera és que tots els fractals tenen una dimensió fraccionària, és a dir, no tenen una dimensió entera o racional com les figures geomètriques euclidianes, que tenen 1, 2 o 3 dimensions, sinó que pot desenvolupar-se en una dimensió no entera que es pot escriure en forma de fracció. Una dimensió 7/4, per exemple, significa un nombre de 1,75 i, per tant, correspon a un cos que es troba en una dimensió entre una línia i un pla. Aquestes dimensions es dedueixen a partir de la mesura de Hausdorff. Tot i així, moltes vegades requereix sofisticats càlculs matemàtics i recursos informàtics.

La iteració persisteix i és infinita. D'aquesta manera, sabent les peces autosimilars i els factors d'augment, podem esbrinar quina és la dimensió fractal de qualsevol figura. Partint de la definició anterior, la dimensió fractal en un objecte autosimilar és:

Dimensió d'un fractal autosimilar = $\dfrac{Log\ (nre.\ peces\ autosimilars)}{Log\ (factor\ d'augment)}$

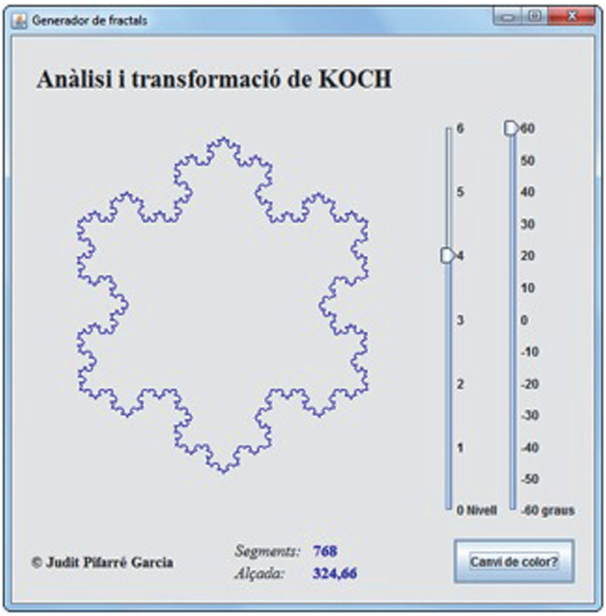
Un altre tret característic de tots els fractals és que tenen la propietat de la infinitud en el càlcul i representació, és a dir, els fractals es consideren infinits ja que a mesura que s'augmenta o disminueix la precisió de mesura, observem que la longitud i el perímetre de la figura en qüestió no té fi. Així doncs, si el nombre de passos per a la construcció d'un fractal és infinit (infinites iteracions) perquè sempre podem disminuir la precisió de la mesura, el perímetre també resultarà infinit però l'àrea sempre serà finita perquè es tracta de figures tancades. Els fractals consten d'una àrea finita en un perímetre infinit!
L'altra propietat és l'autosimilitud. És a dir, les parts tenen la mateixa forma o estructura que el tot, encara que aquestes poden presentar-se a diferent escala i tenir alguna petita variació. Així que les diferents escales de detall tenen formes similars i, per tant, no podem saber mai a quina distància ens trobem de l'objecte en qüestió.
La millor manera d'entendre què és un fractal consisteix a examinar com sorgeix geomètricament a partir de la seva definició algorísmica. Es construeixen mitjançant senzills algorismes geomètrics que podem implementar amb qualsevol programari geomètric. Descriurem a continuació alguns dels fractals lineals més destacats.

El conjunt de Cantor
La construcció d'aquest fractal s'obté després d'infinites repeticions d'un algoritme geomètric senzill: dividir un segment en tres parts iguals i eliminar la central (quedar-nos amb les dues parts dels extrems). Tot seguit, es procedeix de la mateixa manera amb els segments laterals restants, i així indefinidament.

La corba i el floc de neu de Koch
Per construir la corba de Koch s'ha de seguir un algoritme simple partint d'un segment que s'ha de substituir per quatre segments de mida 1/3 de la mida del segment inicial. Aquests es col·loquen de manera que el terç central del segment inicial sigui ocupat per dos dels segments petits formant un triangle equilàter sense la base inferior. Seguidament es repeteix el mateix procés en cada un dels segments restants.

El quadrat o catifa de Sierpinski
Per construir-lo, s'ha de començar amb un quadrat, dividir cada segment en tres parts iguals amb el teorema de Thales de manera que es formen nou quadrats iguals, tres per banda i un al centre el qual és eliminat. Seguidament s'itera l'operació en els vuit quadrats restants, i així successivament.

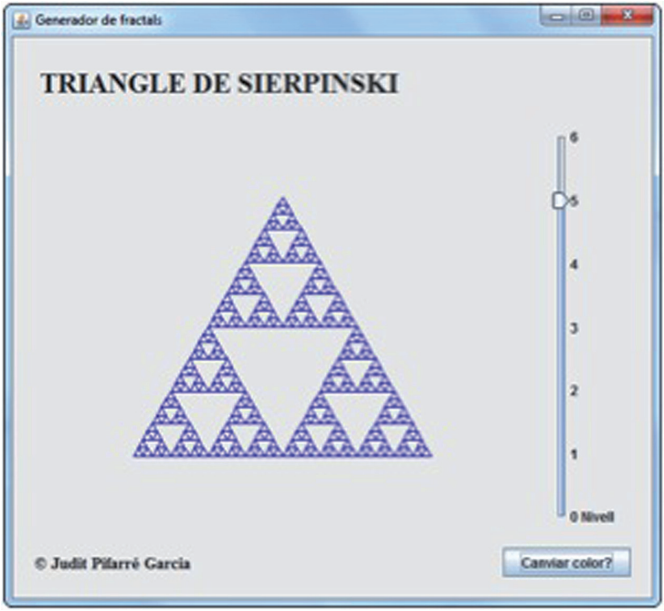
També n'hi ha d'altres com les corbes de Peano, de Hilbert o el triangle de Sierpinski o la catifa en 3D.
Els fractals tenen nombroses aplicacions en diversos àmbits, especialment pel



que fa a les ciències com la cosmologia, la meteorologia, la física... però també en la música, la moda, l'art i arts gràfiques com ara els paisatges virtuals presents en pel·lícules com Star Wars i Star Trek. Per tant, ens ha servit per aproximar-nos més a la realitat i per representar la naturalesa de forma més exacta i precisa tenint en compte les seves irregularitats.

L'altra part del treball és la pràctica d'investigació i anàlisi, en la qual em vaig plantejar el meu principal objectiu: intentar generar applets d'algun fractal conegut mitjançant la programació informàtica amb llenguatge JAVA, i a partir d'aquí experimentar i investigar per arribar a la cerca d'un nou fractal geomètric a partir d'un de ja existent. Aquesta part en concret consta de dos Applets programats amb llenguatge JAVA dels fractals del triangle de Sierpinski i el floc de Koch. A continuació podreu visualitzar el triangle de Sierpinski construït utilitzant la programació amb llenguatge JAVA, aquesta ha estat la metodologia per tal de crear-los, per analitzar la naturalesa geomètrica dels fractals i per reproduir visualment la construcció recursiva del fractal:

Després d'investigar i analitzar la construcció gràfica del fractal de Sierpinski vaig decidir fer un programa que permetés generar nous fractals de forma interactiva i visualitzar-los en temps real.



Així doncs, com a part més purament d'investigació vaig modificar un paràmetre del floc de Koch per reproduir nous fractals a partir del de Koch. Un dels atributs que podia canviar era l'alçada de la llavor, en aquest cas un triangle. Vaig modificar la part del codi que calculava l'alçada del triangle de Sierpinski en funció de l'angle de gir efectuat sobre la base. Canviant l'angle de rotació de la base del triangle, canviava l'alçada del triangle. Després de fer algunes proves em vaig adonar que, efectivament, en canviar la llavor, el fractal canviava. A més, aquest canvi no afectava la base del triangle. Això va resultar interessant perquè l'efecte final era una deformació de la llavor i, en conseqüència, la generació de nous fractals, des del meu punt de vista, força espectaculars. De fet, la geometria fractal, pertanyent a la teoria del caos, constitueix un camp d'investigació recent que avui en dia es considera una de les parts més fascinants de les matemàtiques, de les ciències i de les arts.

Conclusions

Espero que un cop llegit el treball s'hagi entès per a què serveixen els fractals i també que es tingui una visió més «fractal» del món que ens envolta.

A qualsevol que llegeixi el treball li quedarà clar que quan parlem de fractal ens refe-

rim a un objecte geomètric i matemàtic l'estructura del qual es va repetint a diferents escales i que a més té nombroses aplicacions en diversos àmbits del saber, especialment pel que fa a les ciències, però també en la música, la moda, l'art, etc. I, per tant, el treball ens ha servit per aproximar-nos més a la realitat i representar la naturalesa de forma més exacta i precisa tenint en compte les seves irregularitats. Puc afirmar, doncs, que he aconseguit el meu objectiu de donar a conèixer de forma clara i entenedora una visió dels fractals.
Fins i tot, m'ha ajudat i m'ha donat l'oportunitat de conèixer amb més detall les propietats i curiositats dels fractals, i he pogut aplicar els meus coneixements de programació per generar alguns dels fractals geomètrics més coneguts.
Un cop realitzat aquest treball ja no veig ni miro les coses com ho feia abans. El caos i les irregularitats que amaga la natura les interpreto com mai no ho havia fet abans. Els fractals ens envolten, estan presents a tot arreu, fins i tot molts òrgans del cos humà segueixen una estructura fractal. El món és fractal, l'Univers és fractal.

Bibliografia

— ALONSO, José A. Programació de Fractals. [Professor de la Universitat de Sevilla] [Data de consulta: 15 d'octubre de 2014] <http://www.cs.us.es/~jalonso/cursos/i1m/temas/tema-fractales/tema-fractales.html> — FRAME, M.; MANDELBROT, B.; NEGER, N. Fractal Geometry. [Yale University] [Data de consulta: 17 desembre de 2014] <http://classes.yale.edu/fractals/> — JAVA (Copyright © 2014). API Reference. [JAVA API Standard Edition v. 8] [Data de consulta: 21 de gener de 2015] <http://docs.oracle.com/javase/8/> — JApplet (Copyright © 1993, 2014). API Reference. [JAVA API Standard Edition v. 7] [Data de consulta: 4 d'octubre de 2014] <https://docs.oracle.com/javase/7/docs/api/javax/swing/JApplet.html> —PERICH CAMPANA, D. (Copyright © 2000, 2010) Fractales. [Sector Matemática] [Data de consulta: 4 de novembre de 2014] <http://www.sectormatematica.cl/fractales.html> — Entrevista d'Eduard Punset a Benoit Mandelbrot. No todo es liso en la vida. [Redes-424] [Data de consulta: 14 de gener de 2015] <http://www.rtve.es/tve/b/redes2007/semanal/prg424/entrevista.htm> — JAVA Platform (JDK). Java Platform, Standard Edition. [Java SE 8u31] [Data de consulta: 7 de juliol de 2014] <http://www.oracle.com/technetwork/java/javase/downloads/index.html> — Eclipse IDE. Eclipse IDE for Java Developers. [Eclipse Luna SR1a 4.4.1 Release] [Data de consulta: 7 de juliol de 2014] <https://eclipse.org/downloads/> —ALONSO, José A. Programación de fractales en Haskell. [Fractal de la curva de Koch] [Data de consulta: 4 de novembre de 2014] <http://www.cs.us.es/~jalonso/cursos/i1m/temas/tema-fractales/tema-fractales.html> — Fractal Foundation. Inpiring Interest in Science, Math &Art. [Fractals in Nature] [Data de consulta: 22 de desembre de 2014] <http://fractalfoundation.org/>.