Alumne: Pau Baldillou Salse
Tutora: Vanessa Florenza Royes

L'últim teorema de Fermat

Presentació

Quan vaig haver d'escollir un tema per fer aquest treball feia poc que havia decidit que volia estudiar matemàtiques com a grau universitari. La veritat és que des que tinc ús de memòria que m'agraden les matemàtiques, però mai no m'havia plantejat estudiar-les a nivell universitari. Així doncs, un cop començava a tenir clar cap a on volia dirigir-me, vaig haver de triar un tema per al meu treball de recerca i vaig tenir clar que volia fer-lo sobre aquesta disciplina.

De tots els temes possibles, tenia clar que volia endinsar-me en un projecte que no estigués inclòs dins del currículum de batxillerat, volia anar més enllà i tenir l'oportunitat d'aprendre coses noves. És per això que quan vaig veure l'últim teorema de Fermat com una de les propostes, em va cridar l'atenció.

Aquest teorema és un problema quasi irresoluble i envoltat de gran misteri que havia estat segles sense demostrar des que havia estat enunciat. N'havia sentit a parlar una mica, però no en sabia els detalls específics. Va ser aleshores que vaig veure clar que seria un bon tema sobre el qual fer recerca i aprendre més. Concretament, vaig interessar-me pels aspectes més teòrics i «purs» de les matemàtiques.

Així doncs, la pregunta que pretenc contestar al llarg del treball és: *Quin ha estat el progrés dels intents de demostració i com es va poder provar finalment?*

Fermat's equation:

$$x^n + y^n = z^n$$

This equation has no solutions in integers for $n \geq 3$.

Amb aquesta qüestió aspiro a entendre una mica més com funciona una demostració matemàtica i veure com un mateix problema pot ser abordat des de molts punts de vista diferents, amb tècniques variades i, òbviament, amb resultats desiguals.
L'enigma de Fermat pertany als camps més teòrics de les matemàtiques, sense aplicacions directes a la vida real. Si s'hagués demostrat que el que va dir Fermat no es podia provar, o s'hagués trobat un contraexemple, no hi hauria hagut cap gran canvi de paradigma en el si de les matemàtiques, ni hauria tingut importants conseqüències fora de la teoria de nombres.
Tot i això, el misteri que envoltava el seu plantejament, i el fet que els millors matemàtics de cada època intentessin, amb més o menys profunditat, resoldre d'una vegada per totes aquest enigma, l'ha fet un dels més famosos i ha provocat que se'l considerés com un dels problemes més complicats de les matemàtiques. És això, i no les seves aplicacions, el que fa que aquest sigui un teorema interessant i el que va fer que em fixés en ell per començar. Però, sobretot, allò que capta l'atenció de qualsevol és el fet que un problema tan senzill d'enunciar tardés tant temps a poder ser demostrat.

Metodologia

El mètode de recerca que he utilitzat ha estat bàsicament reunir informació dels conceptes que necessitava. Per aconseguir-ho, ha estat necessària la lectura de llibres sobre el tema en qüestió així com la cerca a internet. En concret, vaig llegir dos llibres sobre l'últim teorema de Fermat, així com altres que tractaven temes més generals, com els grans problemes de la història o l'obra de Fermat. A la informació que vaig poder trobar en aquestes publicacions, cal afegir-hi la que vaig trobar en revistes especialitzades i en articles d'internet.
Així doncs, un dels reptes als quals em vaig haver d'enfrontar durant el treball va ser el de connectar tota la informació que anava trobant. Moltes vegades era difícil trobar les demostracions de cada matemàtic i ha estat necessari un important esforç d'interpretació, síntesi i connexió d'idees.
Pel que fa a la part pràctica del treball, he intentat reproduir alguns conceptes mitjançant eines informàtiques. Amb això, pretenc visualitzar un parell de mètodes de càlcul de manera geomètrica i entendre més a fons el seu significat matemàtic.

Cos del treball

El treball consta de quatre capítols bàsics en els quals es desenvolupen diversos temes d'interès per entendre el teorema i, especialment, les demostracions.
En el primer introdueixo l'aparició de les ternes pitagòriques i el seu rol com a punt de partida per a un dels problemes més famosos de les matemàtiques, el que ocupa aquest treball. Per entendre un problema de la magnitud de l'últim teorema de Fer-

mat, és important poder apreciar els seus predecessors, és a dir, allò en què es basa. Així doncs, en aquest capítol explico la història de les ternes pitagòriques i algunes maneres de generar-ne infinites. En aquesta part del treball es troba una de les activitats pràctiques: la interpretació geomètrica utilitzant el GeoGebra de la generació de ternes.

Seguidament, en el segon capítol explico el problema de Diofant en què es va inspirar Fermat per proposar la seva conjectura. Aquest és el problema 8 del segon llibre del matemàtic grec. El problema pretén trobar una manera de separar un quadrat concret en la suma de dos quadrats. Quan Fermat va generalitzar aquest problema per a un quadrat qualsevol, en realitat no era sinó una altra manera de generar ternes pitagòriques. El problema va aparèixer quan va intentar fer el mateix per a un cub. Després d'intentar-ho va escriure que no era possible expressar una potència més gran que 2 com la suma de dues potències de la mateixa magnitud. Això és el teorema de Fermat i el va enunciar de la manera següent:

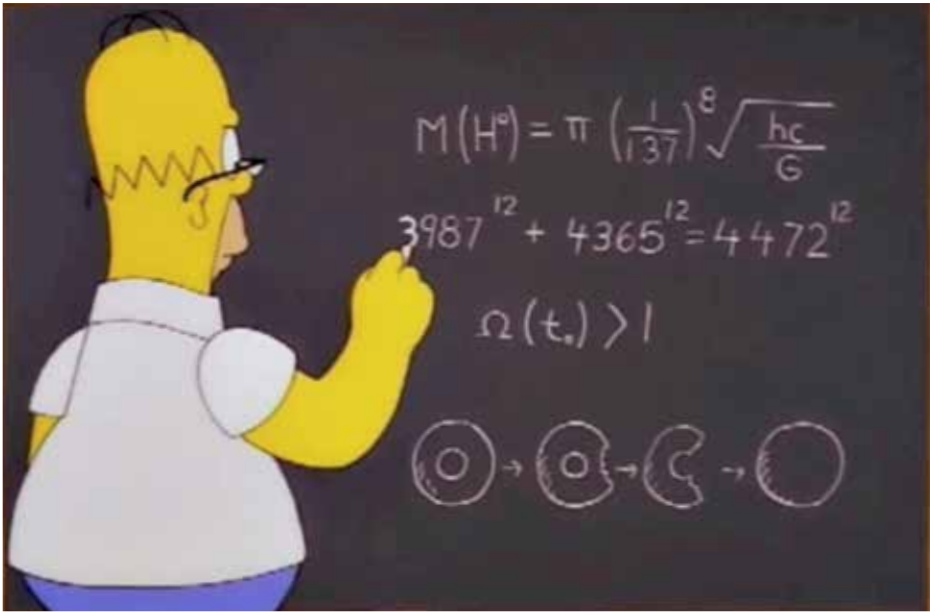
«És impossible que un cub sigui la suma de dos cubs, que una potència quarta sigui la suma de dues potències quartes i, en general, que qualsevol nombre que sigui una potència superior a dos sigui la suma de dues potències del mateix valor. He descobert una demostració veritablement meravellosa d›aquesta proposició, però aquest marge és massa estret perquè hi càpiga.»

Amb això quedava plantejat un dels problemes més famosos de la història: demostrar aquesta afirmació. En aquest mateix capítol també explico la figura del matemàtic francès i una selecció de les seves aportacions més importants en el camp de les matemàtiques.

En el tercer capítol explico quines han estat algunes de les demostracions més rellevants al llarg de la història del teorema de Fermat, de les quals introdueixo algun tipus de prova. És interessant apreciar la dificultat creixent dels intents de demostració al llarg de la història. En aquesta part es pot veure com els diferents matemàtics i matemàtiques que van intentar resoldre el problema introduïen alguna idea nova que no havia estat utilitzada fins aleshores per tal de progressar cap a una demostració final. Com, per exemple, la introducció dels nombres imaginaris per part de Lamé.

El quart capítol és una introducció a la demostració que va donar Wiles per al teorema. Aquesta té una dificultat molt elevada, motiu pel qual no he estudiat la demostració completa, sinó l'explicació dels seus aspectes més importants, com les corbes el·líptiques i les formes modulars, base de la demostració donada pel matemàtic anglès el 1995. Així doncs, també és molt interessant el fet que un problema que en un principi pertany a la teoria de nombres, acabi relacionant-se amb altres branques de les matemàtiques molt diferenciades, i sense una relació aparent amb ells *a priori*. La demostració d'Andrew Wiles va passar per provar una altra conjectura, la Ta-

niyama-Shimura, però a més a més, abans de poder començar a treballar en això, va ser necessari que Keneth Ribet demostrés primer la conjectura Èpsilon, que connectava les dues (T-S i Fermat). En aquest capítol es pot trobar l'altre desenvolupament pràctic del treball. Aquest cop, per entendre millor el concepte de corba el·líptica, n'he construït algunes i, aplicant les seves propietats, he estat capaç d'aconseguir diferents mètodes per trobar punts racionals d'aquestes corbes. Això es basa en la condició de grup dels punts de les corbes el·líptiques.
El treball també conté de dos capítols addicionals on es desenvolupa altra informació interessant i connectada amb el teorema, encara que no estigui tan directament relacionada amb les matemàtiques de les demostracions.
En un d'ells explico quines han estat algunes de les aparicions del teorema a la televisió i a la literatura, així com curiositats d'altre tipus i la seva importància en la cultura matemàtica popular.
En l'altre, explico quins són i han estat altres grans problemes per a les matemàtiques, com els set problemes del mil·lenni o altres conjectures sense demostrar. És en aquest capítol on s'explica la importància d'aquests grans reptes per al progrés d'aquesta disciplina i, en general, per al de qualsevol altra ciència.
Per finalitzar el treball, hi ha un apartat d'annexos on he explicat més a fons alguns



conceptes que he anomenat o utilitzat durant l'explicació de les demostracions; així com una petita biografia dels personatges més importants i aclariments de conceptes que no estan relacionats directament amb el cos del treball.

Conclusions

La pregunta que vaig plantejar-me al principi del treball es pot dividir en dues qüestions diferents:

- Quin ha estat el progrés dels intents de demostració?
- Com es va realitzar la demostració definitiva?

Pel que fa a les preguntes plantejades, gràcies al treball i mitjançant una recerca exhaustiva he pogut entendre i conèixer les principals demostracions parcials que es van fer al llarg del temps i he pogut tractar de manera superficial la prova de Wiles. Personalment estic content amb el resultat de les meves indagacions, i el fet de poder veure i entendre diferents enfocaments per a un mateix problema ha estat molt satisfactori. A més, en entrar en el treball d'Andrew Wiles i algunes de les últimes demostracions parcials, he vist que les matemàtiques són molt més del que veiem a l'escola. El nivell de dificultat ha estat cada cop més elevat a mesura que avançava en la història, fet que m'he pres com un repte i m'ha animat a continuar aprenent.

Com a intent de resposta concisa a les preguntes exposades més amunt, diria que el progrés va ser una travessia per diversos matemàtics de diferents èpoques que «atacaven» amb les eines disponibles, molts cops amb les mecàniques més modernes que existien en el seu moment, el problema a resoldre. Això va acabar quan, potser perquè es van trobar les eines necessàries, potser perquè va arribar la persona adequada, finalment va ser demostrada. L'última demostració utilitza mètodes de matemàtiques modernes i extremadament complicades, de manera que he pogut observar que és impossible que fos la demostració que suposadament tenia Fermat. Això planteja una pregunta: si la de Wiles és l'única demostració possible amb la matemàtica que existeix actualment, és del tot inviable que Fermat tingués una demostració; aleshores, existeix una demostració més senzilla que Fermat hagués pogut descobrir? De moment, aquesta pregunta queda sense resposta.
Algunes de les preguntes que també van sorgir mentre elaborava el treball i he intentat respondre durant aquest projecte han estat:
- Quin és l'origen de la conjectura que va llençar Fermat?
- Quin ha estat l'impacte en la cultura popular d'aquest problema?
- Quins han estat i són altres grans reptes de les matemàtiques?

Així doncs, mentre investigava sobre les qüestions principals, la curiositat va obligar-me a afegir altres conceptes. Crec que he pogut explicar satisfactòriament l'origen de l'equació de Fermat, així com certes referències del problema a la televisió i en altres fonts. Per acabar, també estic content d'haver pogut conèixer els grans problemes de les matemàtiques. Abans de començar vaig marcar-me l'objectiu d'endinsar-me en unes matemàtiques més pures d'aquelles a les quals estava acostumat i poder entendre el seu funcionament. Tot, mentre apreciava la bellesa de la disciplina, que no necessita una aplicació directa a la vida real per ser interessant i profundament transcendent.
L'estudi de la teoria de nombres té com a finalitat entendre l'aritmètica dels nombres naturals i com es comporten entre ells. És un camp que estudia els nombres primers i les equacions diofàntiques; i per mi ha estat molt sorprenent, però alhora interessant, veure com aquesta àrea es pot relacionar amb tants altres camps com la geometria o l'anàlisi.
També vull destacar que mentre investigava i mentre redactava aquest treball he pogut aprendre moltes coses. Sobretot en el camp de les matemàtiques, però també pel que fa a mètodes de recerca i organització del temps. Fent una visió retrospectiva del meu treball crec haver progressat en matemàtiques i valoro molt positivament la introducció a alguns temes com l'aritmètica modular o l'estructura d'una demostració.
Finalment, vull destacar que l'elaboració d'un treball com aquest porta temps i esforç, però el resultat i els coneixements que es poden adquirir fan que sigui un procés satisfactori i que val la pena.

Bibliografia i webgrafia

LLIBRES: Violant i Holz, Albert (2010). *El enigma de Fermat. Tres siglos de desafío a la matemática*. RBA (El Mundo Matemático). — Stewart, Ian (2014). *Los grandes problemas matemáticos*. Planeta. — Singh, Simon (1997). *El enigma de Fermat*. Planeta. – Singh, Simon (2013). «L'últim teorema de Homer». A: *Los Simpson y las matemáticas.* Planeta. — Torrecillas Jover, Blas (1999). *Fermat, el mago de los números.* Nivola. ARTICLES: Cox, David A. (1994). «Introduction to Fermat's Last Theorem». *American Mathematical Monthly*. [En línia] <math.stanford.edu/~lekheng/flt/cox.pdf> — Gutiérrez, Santiago. «Kummer: los números ideales camino del teorema de Fermat». *Suma* (nov. 2010), p. 95-98. — Fallas, Juan José (2009). «Ternas pitagóricas: métodos para generarlas y algunas curiosidades». *Revista Digital de Matemática, Educación e Internet*, vol. 9, núm. 2. [En línia] <www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/>. WEBS (destacats): Euclides. <https://en.wikipedia.org/wiki/Pythagorean_triple> — Teorema del binomi. <https://en.wikipedia.org/wiki/Binomial_theorem> — Gnomon. <https://es.wikipedia.org/wiki/Gnomon> — General. <https://www.youtube.com/watch?-v=nUN4NDVIfVI&list=PLt5AfwLF PxWLD3KG-XZQFTDFhnZ3GHMlW> — Prova de Wiles. <https://blogs.elconfidencial.com/tecnologia/relatos-relativos/2016- 03-19/el-ultimo-teorema-de-fermat-un-enigma-sin-solucion- durante-358-anos_1171160/> — Descens infinit. <http://gaussianos.com/descenso-infinito-un-metodo-de-demostracion-poco-conocido/> — Cas per n = 4. <http://fermatslasttheorem.blogspot.com.es/2005/05/ fermats-last- theorem-n-4.html> — Euler. <http://fermatslasttheorem.blogspot.com.es/ 2005/05/leonhard- euler.html> — Fermat. <http://www.ugr.es/~eaznar/fermat.html> — Aportacions de Fermat. <http://gaussianos.com/pierre-de-fermat-el-jurista-que-nos- mantuvo-en-vilo/> — Petit teorema de Fermat. <https://es.wikipedia.org/wiki/ Pequeño_teorema _de_Fermat> — Cas per n = 3. <http://fermatslasttheorem. blogspot.com.es/2005 /05/fermats-last- theorem-proof-for-n3.html> — Primers de Mersenne. <https://www.gaussianos.com/todo-numero-de-mersenne-con- exponente-compuesto-es-tambien-compuesto/> — <https://tiopetrus.blogia.com/2003/090901-los-primos-de-mersenne-y-los-n-meros-perfectos..php> — Corbes el·líptiques. <https://www.youtube.com/watch ?v=6eZQu120A80> — <http://www.criptomania.com/ criptografia-de-curva-eliptica- introduccion/curvas-elipticas-que-son-y-propiedades/> — Conjunts. <http://www.criptomania.com/conjuntos-matematicos-teoria- basica/> — Derivada implícita. <https://www.youtube.com/watch?v=Yk84Ozjs6lI> — Punt impropi. <http://hipotenusatu.blogspot.com.es/2010/02/las-rectas-paralelas- se-cortan-en-el.html> — Grans problemes. <https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_los_números _primos> — <http://mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/promilenio.htm> — Goro Shimura. <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Shimura.html> — David Hilbert. <https://es.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert> — Medala Fields. <http://www.rsme.es/content/

view/90/75/> — Taniyama-Shimura. <http://mathworld. wolfram.com/Taniyama-ShimuraConjecture.html> — Andrew Wiles. <https://www.britannica.com/biography/Andrew-Wiles> — <http://www.dailymotion. com/video/x223gx8> — Imatge 1 i 2. <https://cdn.rawgit.com/andreacorbellini /ecc/920b29a/interactive/reals-add.html> — Imatge 3. <http://news.mit.edu/sites/mit. edu.newsoffice/files/styles/news_article_image_top_ slideshow/public/images/2016 /LMFDB4-math-mit-1500_0.png?itok=kiaORZuV>