
Alumne: Eloi Navarro Díaz

Tutors: Vanessa Florenza Royes i Roberto Rubio Nuñez

Construcció d'un compàs i d'un regle hiperbòlics

Presentació

Inicialment estava indecís sobre si fer un treball de recerca sobre física o sobre matemàtiques, ja que són els temes que més m'agraden i probablement el meu futur. I mentre em decidia, la meva tutora em va mostrar una proposta interessant, participar en el programa Argó de tutorització de treballs de recerca. I en aquest procés d'inscripció cert tema em va intrigar i alhora em va interessar bastant, la geometria hiperbòlica, tema sobre el qual ho desconeixia tot.

He volgut que el meu treball de recerca tractés sobre aquest tema, de si és possible o no construir un compàs i un regle hiperbòlics, ja que va ser una de les idees que va donar el meu tutor de la UAB del Programa Argó, Roberto Rubio, en la nostra primera reunió, i vaig trobar que seria un repte molt interessant i complicat. El futur del projecte era incert, però emocionant, la qual cosa va ser decisiva a l'hora de triar aquest tema. Un altre propòsit d'aquest treball, ni que sigui mínimament, és també difondre una branca tan poc coneguda de les matemàtiques.

Altres propostes anomenades per Roberto foren més teòriques, com per exemple parlar de la seva història.



Metodologia

El meu treball està separat en quatre grans blocs: la geometria euclidiana, la geometria hiperbòlica i els elements dins la geometria hiperbòlica, que formen la part teòrica del meu treball, i finalment la part pràctica sobre la construcció del compàs i del regle hiperbòlics. Cercar informació d'aquests temes no va ser gaire senzill ja que hi ha poca informació, a causa del desconeixement general d'aquesta branca de les matemàtiques, però a base de llegir llibres sobre el tema, sobretot un de molt complet de la Universitat de Manchester, i contrastant moltes webs i documents sobre el tema a poc a poc vaig poder anar obtenint la informació necessària. La majoria de tots aquests inconvenients van aparèixer en el quart bloc, la part pràctica. Per acabar duent-la a terme m'ha calgut aprendre a programar per poder fer el regle i compàs anomenats anteriorment, i s'hi ha hagut d'afegir també la recerca de com fer diverses funcions que necessitava implementar en el meu programa, i que com que de vegades no les vaig trobar, això va comportar haver fer canvis en el programa.

Cos del treball

En la part teòrica he necessitat partir des de la geometria euclidiana per poder arribar a la hiperbòlica, ja que aquesta darrera és bastant contraintuïtiva i de difícil comprensió. La geometria euclidiana en termes generals és la que s'ensenyava a les escoles i que més o menys tothom coneix simplement com a geometria. Aquesta es basa en cinc postulats o enunciats bàsics dels quals ens centrarem en el V, ja que és l'únic que no se sosté en geometria hiperbòlica. Aquests diuen: «Per dos punts passa un únic segment», «Tot segment es pot prolongar indefinidament», «Donats un centre i un radi podem construir un únic cercle», «Tots els angles rectes són iguals» i (el V) «Donades dues rectes i una secant a aquestes, al costat on l'angle que formin sigui inferior a dos rectes, les rectes suficientment prolongades es tallaran». Com es pot veure el punt V és més complex, per això altres formes equivalents d'anunciar-lo serien: «Els angles interiors d'un triangle sumen 180° » o «Donat un punt exterior a una recta, hi passa una única recta paral·lela a aquesta».

En el segon bloc arribem a la conclusió que si modifiquem l'últim postulat obtenim nous tipus de geometria vàlids però poc intuïtius, la geometria el·líptica, on els angles dels triangles sumen més de 180° i no existeixen rectes paral·leles, i la geometria hiperbòlica, amb angles inferiors a 180° però amb infinites paral·leles a una altra que passin per un punt exterior. Exactament en aquest bloc veiem com pel fet que un full de paper és un pla euclidià, per a poder-hi dibuixar altres tipus de geometria cal realitzar alguna transformació i/o deformació als models d'aquesta geometria, o al es formes de dibuixar-la. L'exemple més clar és el de la Terra, en aquest cas un model el·líptic, on per a poder fer mapes d'aquesta mena els països queden deformats a mesura que ens aproximem als pols, ja que en geometria hiperbòlica

passa quelcom similar. Especialment m'he centrat en els models del semiplà superior i del disc de Poincaré.

Per concloure la part teòrica, en el tercer bloc tractarem sobre diversos elements, que estem molt acostumats a usar en geometria euclidiana, i de quina manera es veuen afectats pel canvi del V postulat. Aquests elements són, per exemple: rectes, distàncies, angles, àrees, cercles, paral·leles, etc. També tracta una mica sobre les tessellacions, o formes d'emplenar amb la mateixa figura o un conjunt d'aquestes tot l'espai amb aquesta geometria; la portada d'aquest treball és un exemple de tessellació en el disc de Poincaré.

Finalment apareix la part pràctica, on pretenia construir els instruments anteriorment anomenats. Aquests aparells requerien tres mòduls o parts, i com que cadascuna portava una feina com per fer un TdR, era inviàble la construcció de tots tres. El 1r reconeixia on es clicava en un foli de paper i reconeixia quina funció es volia dibuixar, recta, segments, cercle, etc., i enviava aquesta informació al 2n mòdul. Aquest era, per dir-ho d'una manera, el cervell de la màquina, on es feien tots els càlculs necessaris, entre altres coses, i enviava les ordres a l'últim mòdul. Aquest darrer era l'encarregat de dibuixar la funció que s'havia seleccionat. Degut a la seva complexitat, m'havia de decidir: o bé canviava radicalment el tema de la meua part pràctica o bé desenvolupava només un dels tres mòduls. I això darrer és el que vaig fer. Vaig crear l'únic dels tres mòduls capaç de funcionar completament per ell sol, el 2n, el cervell de la màquina. Finalment vaig decidir que ja que no era factible fer aquests instruments mecànicament els faria de manera digital i programada a través de l'ordinador. Fou per aquest motiu pel qual vaig haver d'aprendre a programar, com ja havia anunciat anteriorment. Al final vaig aconseguir crear un programa capaç de dibuixar en el model del disc de Poincaré rectes de diversos tipus, cercles i la capacitat de calcular longituds, angles i àrees. Vaig elegir aquest model ja que es pot dibuixar completament en un foli perquè és finit. Per als interessats, el meu programa està disponible en la web següent, i al treball s'explica què s'ha de fer exactament per a descarregar-lo: <https://github.com/Eloind/Hyperbolic-Geometry>.

Conclusions

Un dels primers objectius d'aquest treball era esbrinar si és possible construir un compàs i un regle hiperbòlics. La resposta és que sí, és possible, el problema rau en la quantitat exagerada de treball que suposa la seva implementació tenint en compte que aquest és un treball que es desenvolupa durant el batxillerat. Seria interessant veure aquesta màquina funcionant, però per a algú inexpert resulta una feina titànica. Per aquest motiu la millor solució possible a la qual he pogut arribar ha estat crear un *software* capaç de fer-ho via ordinador. Tot i això, com que ja imaginava que no es podria fabricar aquest mecanisme, el trajecte i el desenvolupament

del projecte ha estat un camí emocionant i entretingut, que m'ha dut a descobrir un nou camp molt apassionant, el món de la programació, del qual encara em falta molt per descobrir i en el qual espero poder continuar endinsant-m'hi més en un futur pròxim.

Amb l'experiència actual només he sigut capaç de programar rectes i cercles amb diferents versions i/o combinacions de cadascun; uns altres elements interessants però que no he pogut programar han sigut per exemple totes les altres còniques diferents del cercle. Això és degut al fet que hiperbòlicament les còniques tenen equacions molt complexes i prenen formes completament diferents a les euclidianes. Respecte a les altres preguntes secundàries sobre quines coses de cada geometria es compleixen en l'altra també ha resultat apassionant. Un dels aspectes més interessants per a mi és que els cercles en les dues geometries són visualment iguals, i fins i tot són bastant similars les fórmules per a calcular-ne el perímetre i l'àrea. Durant aquest procés de recerca m'ha encuriósit descobrir que certes construccions són possibles en geometria hiperbòlica però no en l'euclidiana, com per exemple la infinita quantitat de tessellacions del pla hiperbòlic sempre que es compleixi una condició o el fet que donats els angles d'un triangle en queden definits els seus costats, àrea i perímetre. I a la inversa, que donats els costats, igual que en geometria euclidiana, en queden definits els angles.

Bibliografia

LLIBRES: — Charles Walkden. *MATH32052, Hyperbolic Geometry*. Universitat de Manchester, 2019. Disponible en línia a: <https://personalpages.manchester.ac.uk/staff/charles.walkden/hyperbolic-geometry/hyperbolic_geometry.pdf> — Juan Gomez Urgelles. *Cuando las rectas se vuelven curvas*. Editorial RBA. — WEBS: — <<https://www.maths.gla.ac.uk/wws/cabripages/hyperbolic/circleformulae.html>> — <https://en.wikipedia.org/wiki/Poincar%C3%A9_half-plane_model> — <https://en.wikipedia.org/wiki/Poincar%C3%A9_disk_model> — <<https://math.stackexchange.com/questions/1297641/circumference-of-hyperbolic-circle-is-2-pi-sinh-r>> — <<http://mat.uab.cat/~juditab/Angle%20de%20paral.lelisme.html>> — <<http://elib.mi.sanu.ac.rs/files/journals/tm/39/tmn39p74-80.pdf>> — <https://www.researchgate.net/figure/Conformal-transformations-between-the-Poincare-disk-hemisphere-and-Poincare-half-plane_fig5_251424711> — <http://web1.kcn.jp/hp28ah77/us21_infi.htm> — <<http://cs.uef.fi/matematiikka/kurssit/HyperbolicGeometry/HyperbolicGeometryLehmanFebruary2014.pdf>> — <<https://www.w3schools.com/python/default.asp>> — <<https://www.codecademy.com/>> — <https://www.tutorialspoint.com/python/python_gui_programming.htm> — <<https://stackoverflow.com/>>
